1	2	3	4	$\sum$

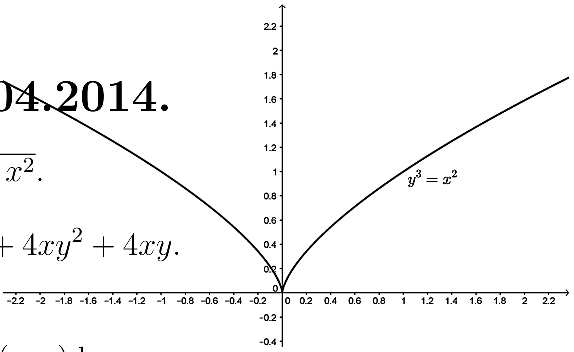
Grupa A

BROJ INDEKSA

SMJER STUDIJA

IME I PREZIME

OBRATITI PAŽNJU NA MATEMATIČKU KULTURU I MATEMATIČKU PISMENOST



Matematika II, prvi parcijalni, 28.04.2014.

1. Naći obim figure ograničene krivima $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2 - x^2}$.

2. Odrediti ekstreme funkcije $z(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2 + 4xy^2 + 4xy$.

3. Izmjeniti poredak integracije u integralu $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x, y)\mathrm{d}y$.

4. Izračunati zapreminu tijela ograničeno površinama $2z = x^2 + y^2$, $y + z = 4$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte.

1	2	3	4	$\sum$

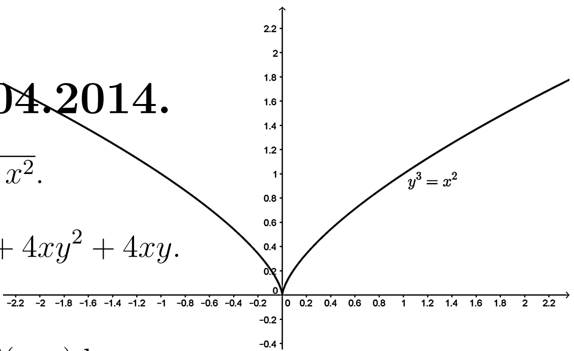
Grupa B

BROJ INDEKSA

SMJER STUDIJA

IME I PREZIME

OBRATITI PAŽNJU NA MATEMATIČKU KULTURU I MATEMATIČKU PISMENOST



Matematika II, prvi parcijalni, 28.04.2014.

1. Naći obim figure ograničene krivima $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2 - x^2}$.

2. Odrediti ekstreme funkcije $z(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2 + 4xy^2 + 4xy$.

3. Izmjeniti poredak integracije u integralu $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x, y)\mathrm{d}x$.

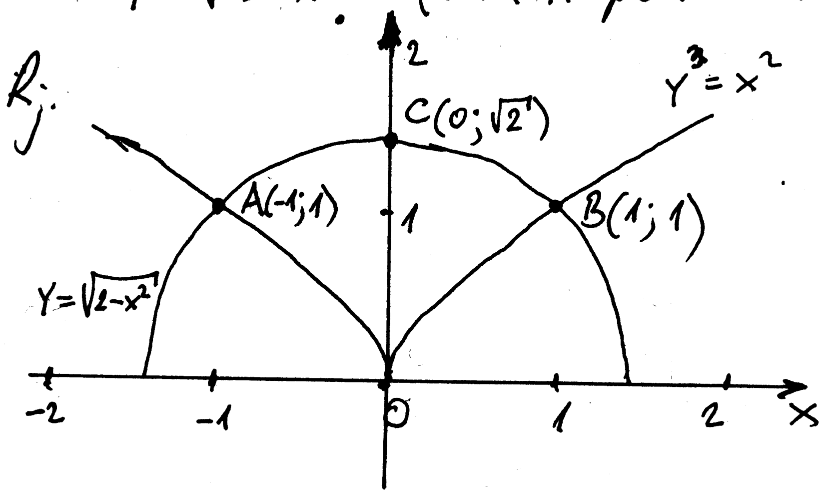
4. Izračunati zapreminu tijela ograničeno površinama $2z = x^2 + y^2$, $y + z = 4$.

VAŽNO: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Nađi obim figure ograničene krivima $y^3=x^2$ i $y=\sqrt{2-x^2}$ (obim ili perimetar figure).

Rj.



Nacrtajmo sliku.

Sa slike primjetimo da zadatak možemo podjeliti na dva dijela:

(a) prvo ćemo naći dužinu luka krive $y^3=x^2$ (luk $\overset{\smile}{AOB}$) od tačke A do tačke B (preko O)

(b) pa ćemo naći dužinu luka $\overset{\smile}{ACB}$ od tačke A do tačke B (preko tačke C)

Primjetimo da su obe date krive simetrične u odnosu na y-osu, pa je dovoljno posmatrati dužinu luka za $x \geq 0$.

Posmatrajmo krivu $y^3=x^2$ i napišimo $x=\pm\sqrt{y^3}$ (mi ćemo posmatrati $x=\sqrt{y^3}$)

$$L_{\overset{\smile}{AOB}} = 2\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \left| \begin{array}{ll} x=\sqrt{y^3}=y^{\frac{3}{2}} & \\ \frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} & 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+\frac{9}{4}y \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy = \left| \begin{array}{l} d(1+\frac{9}{4}y)=\frac{9}{4}dy \\ dy=\frac{4}{9}d(1+\frac{9}{4}y) \end{array} \right| = 2\cdot\frac{4}{9}\int_0^1 \left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{9}{4}y\right) = \ldots = \frac{16}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)$$

$$L_{\overset{\smile}{ACB}} = 2\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Prema tome traženi perimetar figure je

$$L = \frac{26\sqrt{13}-16}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (\approx 5{,}102)$$

(#) Odrediti ekstreme f-je

$$z(x,y)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2y-\frac{1}{2}x^2+4xy^2+4xy$$

Rj. -uputa

$$z'_x=x^2-5xy-x+4y^2+4y$$

$$z'_y=-\frac{5}{2}x^2+8xy+4x$$

$$x^2-5xy-x+4y^2+4y=0$$
$$-\frac{5}{2}x^2+8xy+4y=0$$

$$\vdots$$

$$(x-y-1)(x-4y)=0 \quad \ldots(1)$$
$$-\frac{1}{2}x(5x-16y-8)=0 \quad \ldots(2)$$

Krenimo od jednačine (2):

(a) $x=0$

$$(1)\Rightarrow (-y-1)(-4y)=0$$

$y_1=-1$

$y_2=0$ $\quad M_1(0;-1),\ M_2(0;0)$

(b) $5x-16y-8=0$

$5x=16y+8$

$x=\frac{16}{5}y+\frac{8}{5}$

$$(1)\Rightarrow \left(\frac{16}{5}y+\frac{8}{5}-y-1\right)\left(\frac{16}{5}y+\frac{8}{5}-4y\right)=0$$

$$\left(\frac{11}{5}y+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}y+\frac{8}{5}\right)=0$$

$\frac{11}{5}y+\frac{3}{5}=0$ ili $-\frac{4}{5}y+\frac{8}{5}=0$

$11y+3=0$ $\quad -4y+8=0$

$y=-\frac{3}{11}$ $\quad y=2$

$y=-\frac{3}{11}\Rightarrow x=\frac{16}{5}\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)+\frac{8}{5}$

$=\frac{8}{11}$

$y=2\Rightarrow x=8$ $\quad M_3\left(\frac{8}{11};-\frac{3}{11}\right),\ M_4(8;2)$

Iste bi tačke dobili da smo krenuli od jednačine (1).

Stacionarne tačke f-je su $M_1(0;-1)$, $M_2(0;0)$, $M_3\left(\frac{8}{11};-\frac{3}{11}\right)$ i $M_4(8;2)$.

$z''_{xx} = 2x - 5y - 1$

$z''_{xy} = -5x + 8y + 4$

$z''_{yy} = 8x$

Posmatrajmo tačku $M_1(0;-1)$

$A = 4, \quad B = -4, \quad C = 0, \quad D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0 - 16 < 0$

$\Rightarrow$ F-ja u tački M_1 nema ekstrem

Posmatrajmo tačku $M_2(0;0)$

$A = -1, \quad B = 4, \quad C = 0, \quad D = -16 < 0 \quad \Rightarrow$ f-ja u tački M_2 nema ekstrema

Posmatrajmo tačku $M_3\left(\frac{8}{11}; -\frac{3}{11}\right)$

$A = \frac{20}{11}, \quad B = -\frac{20}{11}, \quad C = \frac{64}{11}, \quad D = \frac{80}{11} > 0$

$\Rightarrow$ f-ja u tački M_2 ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum u ovoj tački

$z_{min}\left(\frac{8}{11}; -\frac{3}{11}\right) = -\frac{126}{363}$

Posmatrajmo tačku $M_4(8;2)$

$A = 5, \quad B = -20, \quad C = 64, \quad D = -8 < 0$

$\Rightarrow$ f-ja u tački M_4 nema ekstrema

Izmeniti poredak integracije u integralu

$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\, dy$$

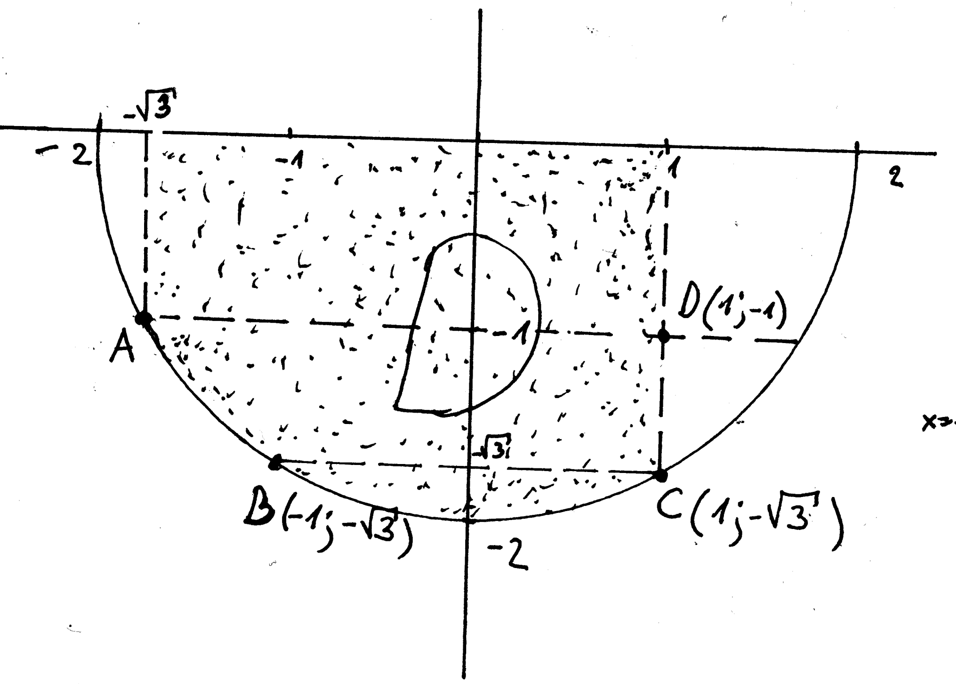
Rj. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\, dy = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ gdje je $D: \begin{cases} -\sqrt{3} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le -\sqrt{4-x^2} \end{cases}$

Skicirajmo D

$y = -\sqrt{4-x^2}$

$y^2 = 4 - x^2$

$x^2 + y^2 = 4$

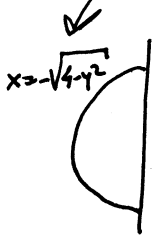


Sa slike vidimo da je

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ gdje su

$D_1: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -\sqrt{3} \le x \le 1 \end{cases}$

$D_2: \begin{cases} -\sqrt{3} \le y \le -1 \\ -\sqrt{4-y^2} \le x \le 1 \end{cases}$



$D_3: \begin{cases} -2 \le y \le -\sqrt{3} \\ -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2} \end{cases}$

Prema tome

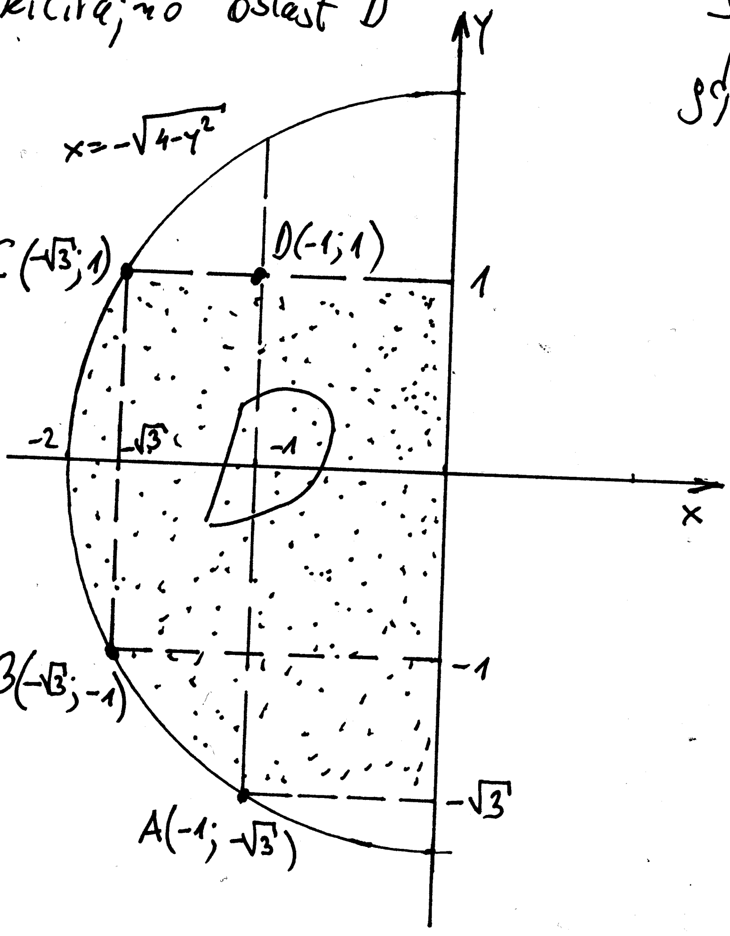
$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\, dy = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\, dx + \int_{-\sqrt{3}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1} f(x,y)\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{3}}^{1} f(x,y)\, dx$$

(#) Izmeniti poredak integracije u integralu

$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)\, dx$$

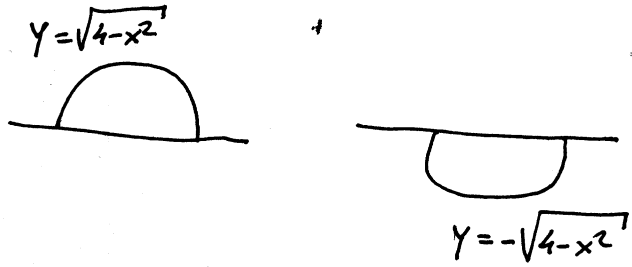
Rj. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)\, dx = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ gdje je $D: \begin{cases} -\sqrt{3} \le y \le 1 \\ -\sqrt{4-y^2} \le x \le 0 \end{cases}$

Skicirajmo oblast D



Sa slike vidimo da je $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ gdje su

$$D_1: \begin{cases} -2 \le x \le -\sqrt{3} \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$



$$D_2: \begin{cases} -\sqrt{3} \le x \le -1 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le 1 \end{cases}$$

$$D_3: \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -\sqrt{3} \le y \le 1 \end{cases}$$

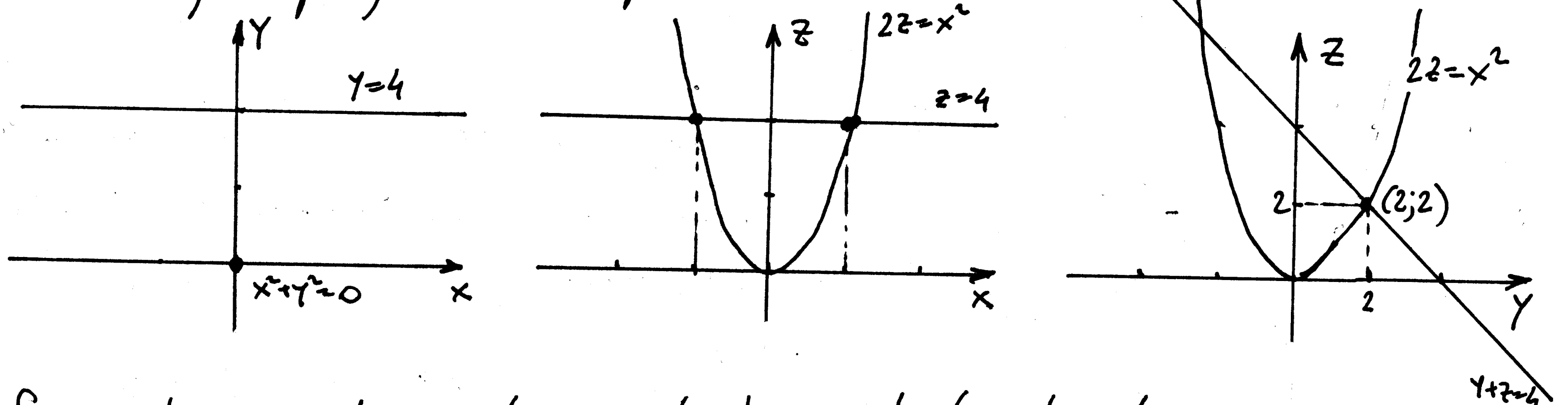
Prema tome

$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)\, dx = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy + \int_{-\sqrt{3}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{1} f(x,y)\, dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{3}}^{1} f(x,y)\, dy$$

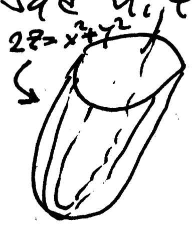
Izračunati zapreminu tijela ograničeno površinama

$$2z = x^2 + y^2, \qquad y + z = 4$$

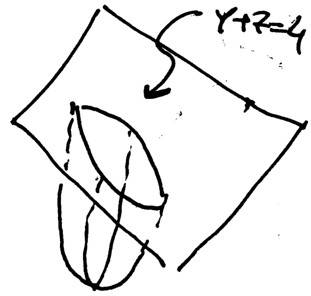
Rj: Skicirajmo presjek dabih površina sa tri koordinatne ravni



Sa ovih presjeka sad nije teško vidjeti da tražimo zapreminu djela paraboloida



koji je odozgo ograničen sa ravni



$$V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} dx\,dy \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{4-y} dz = \iint\limits_{D} \left[(4-y) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right] dx\,dy$$

gdje je D ortogonalna projekcija oblasti D na xOy ravan.

Označimo sa C krivu liniju koja se dobije kao presjek paraboloida $2z = x^2+y^2$ i ravni $y+z=4$.

$$C: \begin{cases} 2z = x^2 + y^2 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

Kako odrediti ortogonalnu projekciju krive c na xOy ravan?

Ortogonalnu projekciju krive C ćemo odrediti ako se iz sistema $\dfrac{2z=x^2+y^2}{y+z=4}$ na neki način "rešimo" promjenjive z.

Pa ako u prvu jednačinu $2z=x^2+y^2$ "stavimo" drugu $z=4-y$ imamo

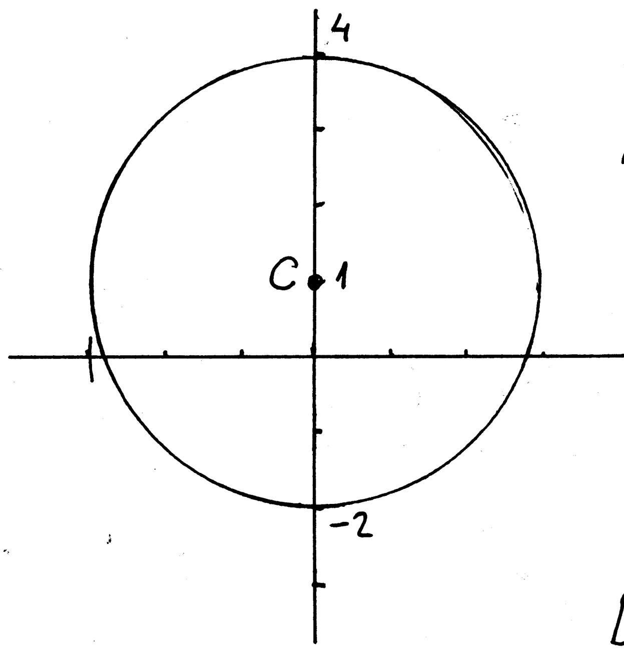
$$2(4-y)=x^2+y^2$$

$$x^2+y^2+2y-8=0 \qquad \ldots(*)$$

$$x^2+y^2+2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2-8=0$$

$$x^2+(y+1)^2=9 \implies$$

Ortogonalna projekcija oblasti Ω na xOy ravan je krug sa centrom $C(0;1)$ poluprečnika 3.



Uvedimo polarne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi$$

$$y+1=\rho\cos\varphi \qquad \ldots(**)$$

$$dxdy=\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$D \xrightarrow{\text{transformiše}} D' : \begin{cases} 0\le\rho\le 3 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

$$4-y-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\left(8-2y-x^2-y^2\right)\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\left(9-x^2-(y+1)^2\right)\overset{(**)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\left(9-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right)=\frac{1}{2}(9-\rho^2)$$

$$V=\frac{1}{2}\iint_{D'}(9-\rho^2)\rho\, d\rho\, d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3(9\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^3\right)\Big|_0^3 d\varphi=\frac{81}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{81}{4}\pi$$